

13 Аппроксимация вполне непрерывных операторов конечномерными. Замкнутость множества вполне непрерывных операторов,

↓ If A - лнн. оп-р оп-р и $\exists$ посл-ть лнн. оп-ров A_n , $\dim R(A_n) < \infty$ и $\|A - A_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то A вполне непр. оп-р. Это усл. A - вполне непр. $\Leftrightarrow$ компакт. ($\forall$ оп-р. лнн-во переносит $\emptyset$ предкомпактное)

(В кат-ве оп-р. лнн-ва $\neq$ лнн-во $\{x\}: \|x\| \leq 1$ A -н, что $\{Ax\}$ - предкомп. лнн-во, т.е. построим д/него покрытие конечной ϵ -сетью. Возьмем $\epsilon > 0$, выберем д/него $A_n: \|A - A_n\| < \epsilon/2$.)

Ув If A_n - лнн. оп-р оп-р и $\dim R(A_n) < \infty$, то A_n - вполне непр. оп-р

▲ A_n - лнн. оп-р. $\Rightarrow$ переводит оп-р. в оп-р с $R(A_n)$ - конечномерное, а всякое оп-р конечномерное лнн-во явл-ся предкомпакт. (по Вольцако - Вейерштрасс) $\Rightarrow A_n$ - компактный $\Rightarrow A_n$ - вполне непр. ■

$\Rightarrow$ лнн-во $\{Ax\}$ предкомп. $\Rightarrow$ д/него можно построить конечную $\epsilon/2$ -сеть: $\exists y_1, \dots, y_m \in H$ $\forall Ax \in \{Ax\} \exists y_n: \|Ax - y_n\| \leq \epsilon/2$, т.е. $Ax \in \bigcup_{k=1}^m B(y_k, \epsilon/2)$, где B - шар с центром y_k и радиусом $\epsilon/2 \Rightarrow Ax \in \bigcup_{k=1}^m B(y_k, \epsilon)$, т.к. $\forall Ax \in \{Ax\}$ выполнено $\|Ax - A_n x\| \leq \|A - A_n\| \|x\| \leq \|A - A_n\| \leq \epsilon/2$, $\|A_n x - y_k\| < \epsilon/2 \Rightarrow \|Ax - y_k\| < \epsilon$ ■

↓ If H - сепараб. шльб. пр-во, A - вполне непр. оп-р: $A: H \rightarrow H$; то $\exists$ посл-ть лнн. оп-ров оп-ров $A_n: H \rightarrow H, \dim R(A_n) < \infty, \|A - A_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

▲ В сеп. шльб. пр-ве $\exists$ полная ортонормир. с-ма $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \Rightarrow$ (с точностью до пер-ка нумерации в-ов базиса) $\forall x \exists \{a_k\}: Ax = \sum_{k=1}^{\infty} a_k A e_k$.

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax - A_n x\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k A e_k \right\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A R_n x\|, \text{ где}$$

$$R_n x = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k e_k$$

A -н, что $\sup_{\|x\| \leq 1} \|A R_n x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, от противного. Это не так,

тогда (индекс посл-ти пиш-ся сверху, чтобы не перепутать с координатой разд-а) $\exists x^n, \exists \epsilon: \|x^n\| \leq 1$ и $\|A R_n x^n\| \geq \epsilon > 0$. Покажем, что $R_n x^n \rightarrow 0$. $\forall y \in H$ будет выполнено: $|(R_n x^n, y)| = |(x^n, R_n y)| \leq \|x^n\| \cdot \|R_n y\| \leq \|R_n y\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2}$. Т.к. $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то $R_n x^n \rightarrow 0$.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} - \text{броуновский процесс} \Rightarrow \|\mathbf{A}\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \textcircled{!} \Rightarrow \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$